

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ

«ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А.С. ПУШКИНА»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для промежуточной аттестации по дисциплине

ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Специальность 09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация выпускника Программист

Форма обучения очная

Санкт-Петербург
2025

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Разделы фонда оценочных средств

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП СПО.
2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.
3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения ОПОП СПО.
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Фонд оценочных средств составлен в соответствии с требованиями ФГОС СПО и примерной основной образовательной программы по специальности.

Фонд оценочных средств разработали: Нестерова Елена Николаевна

1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ С УКАЗАНИЕМ ЭТАПОВ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОПОП СПО

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является достижение следующих результатов обучения: ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09.

Этап дисциплины в формировании компетенций соответствует 4 семестру.

Этап формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется на основе общей характеристики и соответствует порядку изучения дисциплин/профессиональных модулей/практик в учебном плане.

Основными этапами формирования указанных компетенций при изучении обучающимися дисциплины является последовательное изучение содержательно связанных между собой разделов (тем) учебных занятий.

2. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ, ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ

Показателями оценивания компетенций являются следующие результаты обучения:

Код компетенции	Планируемые результаты обучения
ОК 01 ОК 02 ОК 04 ОК 05 ОК 09	<p><u>Знать:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – элементы комбинаторики; – понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность; – алгебра событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности; – схема и формула Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу (теорему) Байеса; – понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики; – <i>законы распределения дискретных случайных величин;</i> – <i>законы распределения непрерывных случайных величин;</i> – <i>числовые характеристики случайных величин;</i> – <i>многомерные случайные величины;</i> – <i>законы распределения многомерных случайных величин;</i> – <i>числовые характеристики многомерных случайных величин;</i> – центральная предельная теорема, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки; – <i>понятие вероятности и частоты;</i> – <i>понятие статистических гипотез;</i> – <i>критерии проверки статистических гипотез;</i> – <i>ковариацию и регрессию;</i> – <i>моделирование случайных величин.</i> <p><u>Уметь:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач; – <i>пользоваться математическим аппаратом для нахождения числовых характеристик случайных величин;</i> – <i>определять законы распределения случайных величин по данным задачи;</i> – использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач; – <i>выдвигать гипотезы о распределении генеральной совокупности;</i> – <i>проверять статистические гипотезы;</i> – <i>моделировать случайные величины;</i> – применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
1.	Теория вероятностей	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09	Знать методы планирования решения комплексных задач, демонстрировать способность поиска информации по предмету в дополнительной литературе, уметь самостоятельно изучать новую литературу с целью поиска новой информации и новых методов решения задач, быть компетентным в основных методах теории вероятностей для решения прикладных задач, распознавать методы теории вероятностей для решения технических и прикладных задач, разбираться в современных методах решения технических и экономических задач, различать законы и процессы на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности, владеть физико-математическим аппаратом для решения задач из области профессиональной деятельности, назвать информационно коммуникативные технологии с учетом требований информационной безопасности, применять стандартные методы профессиональной деятельности с использованием математических моделей, анализировать данные разработанные в теории вероятностей	Контрольная работа Домашнее задание Тест	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
2.	Элементы математической статистика	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09	Знать методы планирования решения комплексных задач, демонстрировать	Контрольная работа Домашнее задание Тест	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
			<p>способность поиска информации по предмету в дополнительной литературе, уметь самостоятельно изучать новую литературу с целью поиска новой информации и новых методов решения задач, быть компетентным в основных методах математической статистики для решения прикладных задач, распознавать методы теории вероятностей для решения технических и прикладных задач, разбираться в современных методах решения технических и экономических задач, различать законы и процессы на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности, владеть физико-математическим аппаратом для решения задач из области профессиональной деятельности, назвать информационно коммуникативные технологии с учетом требований информационной безопасности, применять стандартные методы профессиональной деятельности с использованием математических моделей, анализировать данные разработанные в математической статистике</p>		
Итого:	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09	Форма контроля	Оценочные средства промежуточно й аттестации	Шкала оценивания	
		Зачет с оценкой	Устный зачет с оценкой	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно	

3. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОПОП СПО

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Домашнее задание выполняется в виде типового расчета по дисциплине. Задания выполняются обучающимися индивидуально в течение семестра. Выполнение задач состоит в выполнении заданий, оформлении отчета и защиты в форме доклада. Выполненные задания заранее представляются на проверку и оценивание преподавателем (1-ый этап работы). Представление отчета и защита работ проходят в конце модуля (2-й этап).

Структура домашнего задания (типового расчета):

Задача 1. Непосредственный подсчет вероятности.

Задача 2. Теоремы теории вероятностей.

Задача 3. Геометрическая вероятность.

Задача 4. Формула полной вероятности, Байеса.

Задача 5. Формула Бернулли.

Задача 6. Дискретная случайная величина.

Задача 7. Непрерывная случайная величина.

Задача 8. Функция случайной величины.

Задача 9. Проверка статистических гипотез.

Шкала оценивания и критерии оценки:

Выполненные задачи представляются в печатной форме или в форме электронного документа.

Выполнение задач оценивается по следующим критериям:

Задача 1.

max балл (**1**) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (**0.5**) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;

- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
низкое качество оформления отчета.

Задача 2.

max балл (1) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (0.5) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;
- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
низкое качество оформления отчета.

Задача 3.

max балл (1) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (0.5) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;
- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
низкое качество оформления отчета.

Задача 4.

max балл (1) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы

теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (0.5) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
 - необоснованность и бездоказательность выводов;
 - недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Задача 5.

max балл (2) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (1) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
 - необоснованность и бездоказательность выводов;
 - недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Задача 6.

max балл (2) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (1) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;
- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Задача 7.

max балл (2) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (1) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;
- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Задача 8.

max балл (4) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (3.5) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;

- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Задача 9.

max балл (5) - обучающийся правильно выполнил все задание, грамотно и последовательно излагает материал, дает верные и обоснованные ответы на вопросы теоретического и прикладного характера по теме работы, отчет имеет высокое качество оформления.

min балл (3.5) — обучающийся выполнил все задание, но при выполнении и ответах на вопросы обучающийся допускает неточности, знает только основной теоретический материал, затрудняется в применении теоретического материала к анализу практической задачи, отчет имеет удовлетворительное качество оформления.

0 баллов — задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, не знает значительной части основного теоретического материала, отчет имеет неудовлетворительное качество оформления.

Основанием для снижения количества баллов в пределах от **max** до **min** являются:

- ошибки и неточности в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях, а также при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;
- необоснованность и бездоказательность выводов;
- недостаточная глубина проработки материала, поверхностное ознакомление с литературой по теме;
- низкое качество оформления отчета.

Критерий	Баллы обучающегося	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
Выполнена верно задача 1.		0.5	1
Выполнена верно задача 2.		0.5	1
Выполнена верно задача 3.		0.5	1
Выполнена верно задача 4.		0.5	1
Выполнена верно задача 5.		1	2
Выполнена верно задача 6.		1	2
Выполнена верно задача 7.		1	2
Выполнена верно задача 8.		3.5	4
Выполнена верно задача 9.		3.5	5
Итого:		12	19

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
17-19	отлично
14-16	хорошо
12-13	удовлетворительно
менее 12	неудовлетворительно

Комплект типовых задач

Задача 1. Непосредственный подсчет вероятностей

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлечённая деталь окажется окрашенной.

Отв. $p = 0,1$.

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Отв. $p = 0,5$.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Отв. $p = 0,81$.

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

Отв. $p = 1/120$.

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырёх, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

Отв. $p = 1/A \frac{4}{6} = 1/360$.

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Отв. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

7. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлечённую кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

Отв. а) 2/9; б) 4/9.

8. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделён на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том, случае, если каждый диск занимает одно определённое положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

Отв. $p = 1/6^5$.

9. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определённые книги окажутся поставленными рядом.

Отв. $p = 7 \cdot 2! / 8! = 1/4$.

10. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Отв. $p = C_5^1 \cdot C_3^1 / C_{10}^2 = 1/3$.

11. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

Отв. $\omega = 0,05$.

- 12 Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p = 0,9$. Стрелок произвёл 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Отв. 0,729.

- 13 Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

Отв. 1/12.

- 14 В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Отв. 0,12.

- 15 В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

Отв. 0,936.

- 16 Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)?

Отв. 91/216.

- 17 Предприятие изготавливает 95% изделий стандартных, причём из них 86% - первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Отв. 0,817.

18 Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадает одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется чётное число бросаний.

Отв. а) $15/16$; б) $2/3$.

19 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырёх – вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечётная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Отв. а) $3/5$; б) $3/5$; в) $3/10$.

20 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Отв. $n \geq 2$.

21 Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Отв. 0,936.

Задача 2. Теоремы теории вероятностей

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p = 0,9$. Стрелок произвёл 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Отв. 0,729.

2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

Отв. $1/12$.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Отв. 0,12.

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

Отв. 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)?

Отв. 91/216.

6. Предприятие изготавливает 95% изделий стандартных, причём из них 86% - первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Отв. 0,817.

7. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадает одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется чётное число бросаний.

Отв. а) 15/16; б) 2/3.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырёх – вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечётная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Отв. а) 3/5; б) 3/5; в) 3/10.

9. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Отв. $n \geq 2$.

10. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Отв. 0,936.

Задача 3. Геометрическая вероятность.

1. Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная в квадрат ABCD со стороной 4 попадет в квадрат A₁B₁C₁D₁ со стороной 3, находящийся внутри квадрата ABCD.

Ответ. 9/16.

2. Два лица А и В договорились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 900 до 1000. Каждый из них приходит наудачу (в указанный промежуток времени), независимо от другого и ожидает 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

Ответ. 11/36.

3. В отрезке АВ длины 3 случайно появляется точка С. Определить вероятность того, что расстояние от точки С до В превосходит 1.

Ответ. $2/3$.

4. В круг радиусом 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определите вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

5. Буратино посадил на прямоугольный лист размером 20 см на 25 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил еще одну такую же кляксу, которая целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

Ответ. $\approx 0,97$

6. В окружность вписан квадрат ABCD. На этой окружности случайным образом выбирается точка М. Найдите вероятность того, что эта точка лежит на: а) меньшей дуге АВ; б) большей дуге АВ.

Ответ. а) $1/4$; б) $3/4$.

7. На отрезок $[3;6]$ случайным образом бросается точка X. С какой вероятностью выполняется неравенство: а) $3 \leq X \leq 4$; б) $|X - 4| > 1$; в) $16 < X \leq 25$?

Ответ. а) $1/3$; б) $1/3$; в) $1/3$.

8. Про село Иваново известно только, что оно находится где-то на шоссе между Миргородом и Старгородом. Длина шоссе равна 200 км. Найдите вероятность того, что:

а) от Миргорода до Иваново по шоссе меньше 20 км;

б) от Старгорода до Иваново по шоссе больше 130 км;

в) Иваново находится менее чем в 5 км от середины пути между городами.

Ответ. а) $0,1$; б) $0,35$; в) $0,05$.

Задача 4. Формулы полной вероятности, Байеса

1. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Отв. 92/95.

2. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Отв. 0,86.

3. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

Отв. 0,84.

4. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

Отв. 43/60.

5. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

Отв. 0,875.

6. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая из второго ящика лампа будет нестандартной.

Отв. 13/132.

7. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлечённую наудачу кость можно приставить к первой.

Отв. 7/18.

8. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берёт билет первым или последним?

Отв. Вероятности одинаковы в обоих случаях.

9. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

Отв. 0,625.

10. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжён сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжён сигнализатором С-1 или С-11?

Отв. Вероятность того, что автомат снабжён сигнализатором С-1 равна 6/11, а С-11 – 5/11.

Задача 5. Формула Бернулли

В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включён, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Отв. а) $P_6(4) = 0,246$; б) $P_6(6) = 0,26$; в) $P_6(0) = 0,000064$.

2. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,3.

Отв. $P = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 0,472$.

3. Событие B появится в случае, если событие A появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие B , если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

Отв. $P = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = 0,767$.

4. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы 2 раза.

Отв. $P = 1 - [P_8(0) + P_8(1)] = 0,19$.

5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Отв. а) $P = P_6(0) + P_6(1) = 7/64$; б) $Q = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = 57/64$.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия $p = 0,9$. Вероятность поражения цели при k попаданиях ($k \geq 1$) равна $1 - q^k$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано два выстрела.

Указание. Воспользоваться формулами Бернулли и полной вероятности.

Отв. 0,9639.

7. Найти приближённо вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Отв. $P_{400}(104) = 0,0006$.

8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Отв. а) $P_{100}(70,80) = 2\Phi(1,15) = 0,7498$.

б) $P_{100}(0; 70) = -\Phi(1,15) + 0,5 = 0,1251$.

9. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний $p = 0,75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Отв. $P = 2\Phi(0,23) = 0,182$.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.

Отв. $\mathcal{E} = 0,00967$.

11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p = 0,5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Задача 6. Дискретные случайные величины

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-2	0	2	5
P	0,3	0,2	P3	0,1

Найти p_4 , функцию распределения $F(X)$ и построить ее график, а также $M(X), D(X), \sigma(X)$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	-1	0	1	2	3
p	0,3	0,1	0,2	P4	0,3

Найти p_4 , функцию распределения $F(X)$ и построить ее график, а также $M(X), D(X), \sigma(X)$.

3. В коробке 9 фломастеров, из которых 2 фломастера уже не пишут. Наудачу берут 3 фломастера. Случайная величина X - число пишущих фломастеров среди взятых. Составить закон распределения случайной величины.

4. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 6 учебников, причем 4 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 4 учебника. Случайная величина X -число учебников в переплете среди взятых. Составить закон распределения случайной величины.
5. В билете две задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй- 0,7. Случайная величина X - число правильно решенных задач в билете. Составить закон распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
6. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго-0,8, для третьего -0,7. Случайная величина X - число попаданий в мишень, если стрелки делают по одному выстрелу. Найти закон распределения, $M(X), D(X)$.
7. Баскетболист бросает мяч в корзину с вероятностью попадания при каждом броске 0,8. За каждое попадание он получает 10 очков, а в случае промаха очки ему не начисляют. Составить закон распределения случайной величины X -числа очков, полученных баскетболистом за 3 броска. Найти $M(X), D(X)$, а также вероятность того, что он получит более 10 очков.
8. На карточках написаны буквы, всего 5 гласных и 3 согласных. Наугад выбирают 3 карточки, причем каждый раз взятую карточку возвращают назад. Случайная величина X - число гласных букв среди взятых. Составить закон распределения и найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.
9. В среднем по 60% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения случайной величины X - числа договоров, по которым была выплачена страховая сумма среди наудачу отобранных четырех договоров. Найти числовые характеристики этой величины.
10. Радиостанция через определенные промежутки времени посылает позывные сигналы (не более четырех) до установления двусторонней связи. Вероятность получения ответа на позывной сигнал равна 0,3. Случайная величина X -число посланных позывных сигналов. Составить закон распределения и найти $F(x)$.
11. Имеется 3 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения случайной величины X -числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти $M(X), D(X)$.
12. Производятся последовательные независимые испытания трех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X -числа испытанных приборов.
13. Дискретная случайная величина X имеет три возможные значения: $x_1=1, x_2, x_3$, причем $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятность того, что X примет значения x_1 и x_2 , соответственно равны 0,3 и 0,2. Известно, что $M(X)=2,2, D(X)=0,76$. Составить закон распределения случайной величины.
14. Блок электронного устройства содержит 100 одинаковых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течении времени T равна 0,002. Элементы работают независимо. Найти вероятность того, что за время T откажет не более двух элементов.
15. Учебник издан тиражом 50000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0002. Найти вероятность того, что тираж содержит:

- а) четыре бракованные книги,
- б) менее двух бракованных книг.

16. Число вызовов, поступающих на АТС каждую минуту, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda=1,5$. Найдите вероятность того, что за минуту поступит:

- а) два вызова;
- б) хотя бы один вызов.

Задача 7. Непрерывные случайные величины.

1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2x}{x+1} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$, а также $P(-1/2 < X < 1/2)$.

2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \pi/6, \\ -\cos 3x & \text{при } \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 1 & \text{при } x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$, а также $P(2\pi/9 < X < \pi/2)$.

2.3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ c \cdot x & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) число c ; б) $M(X)$, $D(X)$.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c \cdot \sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

0 при $x > 1$.

Найти: а) число c ; б) $M(X)$, $D(X)$.

5. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{5-x}{2} & \text{при } x \in [3;5], \\ 0 & \text{при } x \notin [3;5]. \end{cases}$$

Найти: а) $F(x)$ и построить ее график; б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях величина X примет ровно 2 раза значение, принадлежащее интервалу $(1;4)$.

6. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X :

$$\begin{cases} f(x) = 2(x-2) & \text{при } x \in [2;3], \\ 0 & \text{при } x \notin [2;3]. \end{cases}$$

Найти: а) $F(x)$ и построить ее график; б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) вероятность того, что в трех независимых испытаниях величина X примет ровно 2 раза значение, принадлежащее отрезку $[1;2,5]$.

7. Функция $f(x)$ задана в виде:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} & \text{при } x \in [-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2]. \end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной c , при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X ; б) функцию распределения $F(x)$.

8. Функция $f(x)$ задана в виде:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{c}{\cos^2 x} & \text{при } x \in [-\pi/4; \pi/4], \\ 0 & \text{при } x \notin [-\pi/4; \pi/4]. \end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной c , при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X ; б) функцию распределения $F(x)$.

9. Случайная величина X , сосредоточенная на интервале $(3;7)$, задана функцией распределения $F(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 6x + 9)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение: а) меньше 5, б) не меньше 7.

10. Случайная величина X , сосредоточенная на интервале $(-1;4)$,

$$\frac{x}{5} + \frac{1}{5}$$

задана функцией распределения $F(x) =$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение: а) меньше 2, б) не меньше 4.

11. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{c \cdot \ln x}{x} & \text{при } x \in [1; e], \\ 0 & \text{при } x \notin [1; e]. \end{cases}$$

Найти: а) число c ; б) $M(X)$; в) вероятность $P(X > M(X))$.

12. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \sin x & \text{при } x \in [0; \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi]. \end{cases}$$

1

Найти: а) $M(X)$; б) вероятность $P(X \leq M(X))$

13. Распределение Рея задается плотностью вероятности:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

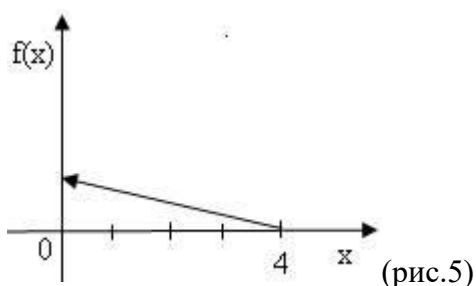
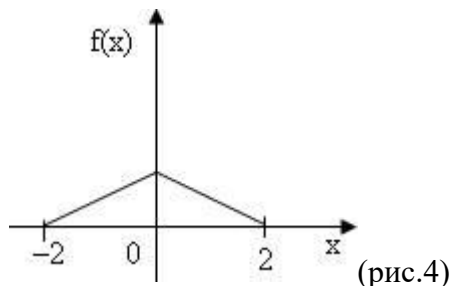
Доказать, что $f(x)$ действительно является плотностью распределения вероятностей.

14. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X :

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ f(x) = c \cdot x \cdot e^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти число c .

15. Случайная величина X распределена по закону Симпсона (равнобедренного треугольника) на отрезке $[-2; 2]$ (рис.4). Найти аналитическое выражение для плотности вероятности $f(x)$ на всей числовой оси.



16. Случайная величина X распределена по закону «прямоугольного треугольника» в интервале $(0;4)$ (рис.5). Найти аналитическое выражение для плотности вероятности $f(x)$ на всей числовой оси.

Задача 8. Функция случайной величины.

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin(X)$.

Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения $p_y(x)$ случайной величины $Y = \cos(X)$.

3. Задан закон распределения д.с.в. X :

X	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,6

Найти MY , если: 1) $Y = X^2$; 2) $Y = 2X + 10$.

Задача 9. Проверка статистических гипотез

1. Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$
n_j	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

2. Монету бросали 4040 раз (Бюффон). Получили $n_1 = 2048$ выпадений герба и $n_2 = 1992$ выпадений решетки. Проверить, используя критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о симметричности монеты ($\alpha = 0,05$).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольные работы выполняются обучающимися в конце модуля во время аудиторных занятий. На выполнение отводится 2 академических часа. Работы выполняются индивидуально, представляются в письменной форме и должны удовлетворять следующим требованиям: в работе указывается ФИО студента, номер группы, условие каждого задания, основные этапы решения, необходимые иллюстрации, ответ или вывод.

Комплект заданий для контрольной работы

Раздел 1. «Теория вероятностей»

1. Из последовательности 30,31,32,...,65 наудачу выбираются два разных числа. Найти вероятность того, что одно из них больше 53, а другое меньше 53.

Вероятность попадания в цель при первом выстреле 0,3, при втором 0,4, при третьем 0,7. Вероятность поражения цели при одном попадании 0,2, при двух 0,3, при трех 0,6. Найти вероятность поражения цели при трех выстрелах.

В партии из 24 изделий 8 нестандартных. Найти вероятность того, что 2 из 5 наудачу взятых изделий окажутся стандартными.

Вероятность, что каждый из пяти имеющихся приборов включен равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент времени включены три прибора.

В первой корзине два персика и шесть яблок, во второй - девять персиков и восемь яблок. Из первой корзины во вторую наудачу переложили семь фруктов. Какова вероятность случайным образом достать персик из второй корзины?

Известно, что из ста деталей, изготовленных первым мастером, на доработку обычно возвращаются 40 деталей, а у второго мастера - 14 деталей. На проверку у каждого мастера взяли по одной детали и, в результате, одну из деталей вернули на доработку. Найти вероятность, что эта деталь изготовлена первым мастером.

Найти дисперсию дискретной случайной величины X , имеющей закон распределения:

X	3	7	8	9
P	0,5	0,1	0,1	0,3

Случайная величина X может принимать два значения: x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6. Найти значение выражения $(x_1 - x_2)^2$, если дисперсия $D(X) = 3/19$.

Вероятность появления события A в первом испытании 0,1, во втором 0,6, в третьем 0,2 и в четвертом 0,5. Найти математическое ожидание числа появлений события A в четырех испытаниях.

Шкала оценивания и критерии оценки:

Минимальное количество баллов — 3 балла

Максимальное количество баллов — 5 баллов

- **5 баллов** – обучающийся правильно выполняет все задания, выбирает оптимальный способ решения, аккуратно оформляет работу.
- **4 балла** – обучающийся выполняет все задания, при сохранении правильной последовательности этапов решения допускает незначительные вычислительные ошибки, аккуратно оформляет работу.
- **3 балла** – обучающийся правильно выполняет не менее 6 задач, допускает вычислительные ошибки, непоследовательность в решении, неаккуратность в оформлении.
- **менее 3 баллов** – обучающийся правильно выполняет менее 6 задач, допускает существенные ошибки в вычислении и последовательности решения, оформление работы - неудовлетворительное.

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
4.5-5	отлично
3.5-4	хорошо
3	удовлетворительно
менее 3	неудовлетворительно

Контрольная работа по разделу 2 «Элементы математической статистики»

1. Для выборки

x_i	4	6	8	12
n_i	3	6	9	6

найдите частоту значения $x_3 = 8$.

2. Для выборки

x_i	4	6	8	12
n_i	3	6	9	6

найдите выборочное среднее.

3. Для выборки

x_i	4	6	8	12
n_i	3	6	9	6

найдите несмещенную оценку дисперсии.

4. Найдите доверительный интервал для параметра a , соответствующий доверительной вероятности $P = 0,80$, если известно, что $P(|a - 4,36| < 0,36) = 0,80$.

5. Доверительный интервал для параметра a , соответствующий доверительной вероятности $P = 0,85$, имеет вид $(-0,15; 1,25)$. Напишите формулу, устанавливающую связь между доверительной вероятностью и доверительным интервалом.

6. Оценка коэффициента корреляции между случайными величинами X и Y равна $r = -0,87$. Какая гипотеза более обоснована: X и Y коррелированы или X и Y некоррелированы?

Шкала оценивания и критерии оценки:

Минимальное количество баллов — 2 балла

Максимальное количество баллов — 4 балла

- **4 балла** – обучающийся правильно выполняет все задания, выбирает оптимальный способ решения, аккуратно оформляет работу.
- **3 балла** – обучающийся выполняет все задания, при сохранении правильной последовательности этапов решения допускает незначительные вычислительные ошибки, аккуратно оформляет работу.
- **2 балла** – обучающийся правильно выполняет не менее 4 заданий, допускает вычислительные ошибки, непоследовательность в решении, неаккуратность в оформлении.
- **0-2 балла** – обучающийся правильно выполняет менее 4 заданий, допускает существенные ошибки в вычислении и последовательности решения, оформление работы - неудовлетворительное.

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
4	отлично
3	хорошо
2.5	удовлетворительно
менее 2.5	неудовлетворительно

ТЕСТ

Тесты являются формой текущего и рубежного контроля и содержат теоретические или (и) практические задания. Каждое задание теста имеет в зависимости от вида теста определенный вес (в промежуточных баллах).

При проведении тестирования преподавателем тест выполняется индивидуально, результаты представляются в письменной форме и должны удовлетворять следующим требованиям: в работе указывается ФИО студента, номер группы, номер задания, необходимые иллюстрации, ответ.

На прохождение каждого этапа теста отводится 1 академический час.

Примеры тестовых заданий

Типовой тест по разделу 1:

1. Решить уравнение $A_x^2 + C_x^1 = P_4 + 1$.
2. Упростить $\Omega - (\bar{A} - B)$.
3. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Найти вероятность того, что из двух взятых наугад карточек можно составить число 53?
4. На столе лежат 4 одинаковых коробки с карандашами, по 10 карандашей в каждой. В I коробке – 5 красных карандашей, во II – 4, в III – 3, в IV – 1. Найти вероятность вытащить наугад красный карандаш из произвольно взятой коробки.
5. Из пяти имеющихся в тире винтовок три снабжены оптическим прицелом. Хозяин тира выкладывает их на стойку, пока не достанет винтовку с оптическим прицелом. Ее он отдает посетителю. X – число винтовок на стойке. Найти $E(X)$, $P(X = 2)$ и построить график функции $F(x)$.

Шкала оценивания и критерии оценки:

Критерий	Баллы обучающегося	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
Количество правильных ответов на вопросы теста при общем количестве правильных ответов не менее, чем на 6 баллов и более		6	10
Итого:		6	10

В случае если обучающийся дал менее 3 правильных ответов на вопросы теста, он получает 0 баллов.

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
10	отлично
8-9	хорошо
6-7	удовлетворительно
менее 6	неудовлетворительно

Типовой тест по разделу 2:

1. Найти вероятность попадания случайной величины X в

интервал $\left(\frac{41}{8}, \frac{49}{8}\right)$, если известна ее плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5, \\ x - 5, & 5 < x \leq 6, \\ 7 - x, & 6 < x \leq 7, \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

2. Найти математическое ожидание случайной величины, имеющей функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 13/8, \\ (8x - 13)^2, & 13/8 < x \leq 7/4, \\ 1, & x > 7/4. \end{cases}$$

3. Результаты измерений сгруппированы по интервалам и представлены в таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i^*	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
n_i	5	11	14	19	26	24	26	22	21	16	9	7

где x_i^* - середины интервалов, n_i - количество значений, попавших в i -й интервал, $i = 1, 2, \dots, 12$. Найти длину доверительного интервала для математического ожидания случайной величины X - результата измерений, с надежностью $0,84$, считая распределение близким к

нормальному, $\Phi(1,41) \approx 0,92$; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx$.

4. Найти вероятность того, что двумерная случайная величина (X, Y) примет значение, принадлежащее множеству $\{(x, y) : 9 \leq x \leq 16, 6 \leq y \leq 16\}$, если известен закон ее распределения:

$Y \setminus X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 6$	$x_3 = 10$	$x_4 = 15$	$x_5 = 17$
$y_1 = 3$	0,01	0,06	0,03	0,07	0,04
$y_2 = 7$	0,02	0,07	0,04	0,15	0,03
$y_3 = 11$	0,06	0,05	0,01	0,03	0,06
$y_4 = 16$	0,08	0,04	0,06	0,01	0,08

5. Найти условное математическое ожидание $M(Y | X = x_5)$, если известно распределение системы дискретных случайных величин (X, Y) :

$Y \setminus X$	$x_1 = 3$	$x_2 = 7$	$x_3 = 11$	$x_4 = 14$	$x_5 = 18$
$y_1 = 2$	0,03	0,02	0,19	0,08	0,05
$y_2 = 8$	0,09	0,15	0,23	0,06	0,1

Шкала оценивания и критерии оценки:

Критерий	Баллы обучающегося	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
Количество правильных ответов на вопросы теста при общем количестве правильных ответов не менее, чем на 6 баллов и более		6	10
Итого:		6	10

В случае если обучающийся дал менее 3 правильных ответов на вопросы теста, он получает 0 баллов.

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
10	отлично
8-9	хорошо
6-7	удовлетворительно
менее 6	неудовлетворительно

УСТНЫЙ ЗАЧЁТ С ОЦЕНКОЙ

Экзамен проводится в устной форме.

В билет включается по одному вопросу из первой и второй части перечня вопросов для данного семестра, а также одна задача из списка задач к экзамену.

Ответ должен содержать определения понятий, входящих в вопрос, утверждения теорем, интерпретацию понятий (геометрический или физический смысл), изложение методов, указание границ их применимости.

Для получения оценки «хорошо» или «отлично» необходимо представить доказательства утверждений и теоретическое обоснование методов, привести примеры применения понятий и теорем к решению задач.

Помимо этого, обучающемуся предлагается кратко ответить на два дополнительных вопроса по темам семестра (дать определение понятия, сформулировать теорему, провести классификацию, проиллюстрировать понятие). Вопросы выбираются из перечня вопросов к экзамену и формулируются преподавателем во время устной беседы.

Экзамен может проводиться в устной или форме. На подготовку к устному ответу на вопросы билета и решение задачи отводится 1 академический час. При проведении экзамена в устной форме в аудитории может находиться одновременно не более 4-5 обучающихся, оценивание проводится преподавателем(-ями) непосредственно во время экзамена.

Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену:

1. Случайные события: испытания, вероятность, частота. Свойства частоты
2. События, алгебра событий.
3. Аксиоматическое определение вероятности, следствия.
4. Классическая вероятность, проверка аксиом.
5. Язык теории вероятностей и теории множеств
6. Статистическая вероятность. Проверка аксиом
7. Геометрическая вероятность, проверка аксиом
8. Задача о встрече.
9. Задача Бюффона, ее следствия
10. Задача о делении приза.
11. Теорема умножения. Независимость. Теорема сложения.
12. Формула полной вероятности.
13. Формула Байеса.
14. Схема и формула Бернулли, частные случаи. Формула Пуассона.
15. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.
16. Дискретная случайная величина, ряд распределения, многоугольник и функция распределения .
17. Мат.ожидание дискретной случайной величины, его интерпретация и свойства.
18. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение
19. Мода, медиана, начальный и центральный моменты
20. Функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.
21. Плотность вероятности непрерывной случайной величины. Ее свойства, математическое ожидание, дисперсия
22. Биномиальное распределение.
23. Распределение Пуассона
24. Равномерное и показательное распределение.
25. Нормальное распределение. Функция Лапласа и ее свойства.
26. Система двух случайных величин, функция распределения и плотность

27. Числовые характеристики системы случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, корреляционный момент. Коэффициент корреляции и его физический смысл
28. Независимость и некоррелированность.
29. Числовые характеристики системы случайных величин.
30. Функция случайной величины
31. Числовые характеристики функции случайной величины
32. Неравенства Маркова и Чебышева Правило 3-сигма
33. Теорема Бернулли. Теорема Пуассона. Теорема Колмогорова.
34. Закон больших чисел. Теорема Муавра – Лапласа.
35. Закон больших чисел. Теорема Ляпунова.
36. Основные понятия статистики: генеральная совокупность, выборка, вариационный ряд, статистический ряд, эмпирическая функция распределения.
37. Точечные оценки, требования к ним. Интервальные оценки.
38. Статистическая проверка гипотез. Критерий Пирсона.

Примерный перечень задач для подготовки к экзамену:

1. Даны три события в $\Omega = R$:

$$A = \{x \in [0, 4]\}; B = \{x \in [1, 5]\}; C = \{x \in [-2, 2]\}$$

Что означают события: $A+B+C$, ABC , \overline{AB} , $B-A$, $C-A$, $A-C$

2. Среди 20 лотерейных билетов 2 выигрышных. Наудачу взяли 10 билетов. Найти вероятность того, что среди них а) один выигрышный, б) хотя бы один выигрышный.

3. В коробке 5 красных и 4 синих шара. Достают 2 шара. Найти вероятность того, что а) шары будут одного цвета; б) шары будут разноцветные.

4. Слово ВЕРОЯТНОСТЬ разделили на буквы. 8 из них выложили в ряд. Какова вероятность, что получится слово ВЕРНОСТЬ.

5. Из коробки, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынимают все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что оставшийся шар будет белым.

6. Три стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятности их попадания: первого - 0,9; второго - 0,8, третьего - 0,7. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

7. В первой коробке 5 белых и 3 черных шара, во второй - 2 белых и 4 черных шара. Из каждой коробки извлекают по одному шару, затем из этих двух шаров наудачу берут один. Какова вероятность, что этот шар белый.

8. В группе 40% студентов – отличники, 5% - неуспевающие. Данную задачу отличник решает с вероятностью 0,9; неуспевающий – с вероятностью 0,1, а остальные студенты – с

вероятностью 0,65. Вызванный студент решил задачу. Какова вероятность, что этот студент – отличник.

9. Найти $P(A)$, $P(B)$, $P(B/A)$, если $P(A+B)=0,8$; $P(AB)=0,3$; $P(A/B)=0,6$. Зависимы ли события A и B ?

10. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность выпадения орла хотя бы один раз.

11. Подбрасывается монета. Что вероятнее - появление трех орлов при 4-х бросаниях или 3-х решек при 8 бросаниях.

12. Вероятность сдать каждый из пяти зачетов для студента составляет 0,8. Найти вероятность того, что а) студент сдаст хотя бы три зачета; б) студент не сдаст один зачет; в) студент не сдаст хотя бы один из зачетов.

13. Даны распределения двух независимых случайных величин:

X	-2	0	Y	-1	1
P	0,5	0,5	P	0,25	0,75

$Z=2X-3Y-10$. Найти $M(Z)$, $D(Z)$.

14. $M(X)=0,8$. Найти x_2 и p_4 по заданному распределению случайной величины X :

X	-2	?	1	2
P	0.1	0.3	0.2	?

Найти дисперсию случайной величины X , среднее квадратическое отклонение. Найти функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$.

15. Дано распределение случайной величины X :

X	0	1	2	3
P	p_1	0,2	p_3	0,3

Найти p_1 , p_3 , если $M(X)=1,9$.

Найти $M(X)$, $D(X)$, закон распределения X , $P(1 \leq X < 3)$, построить график $F(x)$.

16. Клиенты банка, не связанные друг с другом, возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,9. Составить закон распределения числа невозвращенных в срок кредитов из 4-х выданных.

17. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,9, а вероятность того, что второй – 0,6. Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равной числу покупок, сделанных покупателями. Найти $F(x)$ и построить ее график.

18. X и Y – случайные величины. $D(X)=2$, $D(Y)=3$, $cov(X;Y)=1$. Найдите $D(X+Y)$, $D(X-2Y)$.

19. X и Y – случайные величины. $D(X)=4$, $D(Y)=9$, $r(X;Y)= -0,72$. Найдите $D(X+Y)$,

$D(X-2Y)$.

20. Дано двумерное распределение дискретных случайных величин (X, Y) . Найти одномерные законы распределения X и Y , условное математическое ожидание $M(X/Y=3)$, $M(Y/X=4)$. Найти ковариацию $cov(X, Y)$ и коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

$X \setminus Y$	1	3	4
1	0,05	0,19	0,24
4	0,12	0,13	0,27

21. Выживаемость икры рыб составляет 20%. Найти вероятность того, что из 200 икринок а) выживет только 42; б) выживет от 35 до 48 икринок; в) не выживет от 150 до 170 икринок.

22. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A произойдет 750 раз. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 710 и не более 740 раз.

23. Вероятность наличия скрытых дефектов в партии телевизоров 0,1%. Продано 200 телевизоров. Найти вероятность того, что среди проданных телевизоров будет 2 телевизора со скрытым дефектом.

24. Задана функция плотности распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2 \\ c, & \text{при } -2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти c , функцию распределения $F(x)$, изобразить графики $F(x)$, $f(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, моду, медиану, квантиль уровня 0,8, $P(X > 1)$.

25. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[3, 7]$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(2 \leq X < 4)$

26. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ -x^2 + 10x - 24, & \text{при } 4 < x \leq 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$, изобразить графики $F(x)$, $f(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, моду, медиану, квантиль уровня 0,05, $P(X=1)$, $P(X > 4,25)$.

27. Дано $X \sim N(m, 4)$, $P(X < 1) = 0,023$

Найти 1) $P(2 < X < 3)$; 2) $P(X < 4)$; 3) $x_{0,25}$

28. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$, изобразить графики $F(x)$, $f(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, моду, медиану, квантиль уровня 0,75, $P(X > 2,5)$.

29. Дано $X \sim N(2, \sigma^2)$; $P(X > 3) = 0,16$

Найти 1) $P(3 < X < 4)$; 2) $P(X < 1)$; 3) $x_{0,9}$

30. По сгруппированным данным, представленным в таблице, где n_i – частота попадания значений признака X в промежуток $(c_{i-1}, c_i]$.

$(c_{i-1}, c_i]$	n_i
2-4	4
4-6	6
6-8	19
8-10	12
10-12	9

Найти:

- 1) выборочные оценки $M(X)$, $D(X)$, σ_X ;
- 2) несмещенную выборочную оценку $D(X)$, σ_X ;
- 3) выборочные оценки моды, медианы,
- 4) построить [гистограмму](#) и график выборочной функции распределения $F_n(x)$.

31. По заданному распределению выборки:

x_i	2	5	8	9
n_i	10	3	12	15

Найти выборочную оценку математического ожидания, моду, медиану, выборочную дисперсию. Используя абсолютные частоты, построить полигон частот.

32. Ожидается, что при добавлении специальных веществ жесткость воды уменьшается. По оценкам жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно получили средние значения жесткости (в стандартных единицах), равные 4,0 и 3,7. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной 0,25. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Экзаменационное задание содержит два теоретических вопроса и практическую задачу.

Структура типового экзаменационного задания:

Экзаменационный билет № _____

Вопрос 1: Классическое определение вероятности. Аксиомы.

Вопрос 2: Числовые характеристики двумерной случайной величины.

Задача. Известно, что из ста деталей, изготовленных первым мастером, на доработку обычно возвращаются 40 деталей, а у второго мастера - 14 деталей. На проверку у каждого мастера взяли по одной детали и, в результате, одну из деталей вернули на доработку. Найти вероятность, что эта деталь изготовлена первым мастером.

Шкала оценивания и критерии оценки:

Критерии оценки	Баллы обучающегося	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
Уровень усвоения теоретического материала, предусмотренного программой		3	4
Умение выполнять практические задания, предусмотренные программой		3	4
Уровень знакомства с основной литературой, предусмотренной программой		1	2
Уровень знакомства с дополнительной литературой		0,5	1
Уровень раскрытия причинно-следственных связей		1	2
Уровень раскрытия междисциплинарных связей		1	2
Качество ответа (его общая композиция, логичность, убежденность, общая эрудиция)		1	2
Ответы на вопросы: полнота, аргументированность, убежденность, умение использовать ответы на вопросы для более полного раскрытия содержания вопроса		1	2
Деловые и волевые качества докладчика: ответственное отношение к работе, стремление к достижению высоких результатов, готовность к дискуссии, контактность		0,5	1
Итого баллов:		12	20

Соответствие баллов шкале оценивания:

Количество баллов	Оценка обучающегося
18-20	отлично
15-17	хорошо
12-14	удовлетворительно
менее 12	неудовлетворительно

Знания, умения и навыки обучающихся при промежуточной аттестации **в форме экзамена** определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

«Отлично» – обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

«Хорошо» – обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

«Удовлетворительно» – обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

«Неудовлетворительно» – обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Во время проведения лекционных и практических занятий оценивается познавательная активность и участие в дискуссиях обучающихся, предварительная подготовка к занятию.

Тестирование по разделам дисциплины проводится преподавателем. При проведении теста преподавателем определение рейтинга теста и его пересчет в баллы проводится преподавателем.

Темы и задания домашних работ распределяются преподавателем между обучающимися в начале изучения темы. Готовые отчеты, доклады, презентации представляются в заранее оговоренные сроки. Преподаватель осуществляет организацию и контроль самостоятельной работы обучающихся при выполнении заданий: предоставляет график консультаций и определяет сроки выполнения и защиты этапов работы. В течение всего срока выполнения работ проводятся онлайн-консультации с обучающимися. Допуск обучающегося к защите происходит при условии наличия электронной или печатной версии отчета по домашней работе, выполненного в соответствии с требованиями к выполнению и оформлению работы. Оценивание домашних работ проводится по окончании защиты работ, результаты оценивания переводятся в систему оценок преподавателем в соответствии с утвержденной шкалой оценивания.

Контрольные работы проводятся по завершении изучения темы (тем) модуля в часы аудиторных занятий. Образцы контрольных работ или перечень примерных задач, а также требования к оформлению работ предоставляются обучающимся заранее. Проверка и оценивание контрольных работ проводится преподавателем в течение одной-двух недель, но не позднее окончания рубежной аттестации.

В случае невыполнения контрольных, тестовых заданий и типового расчета в установленные сроки обучающемуся необходимо погасить задолженность по невыполненным заданиям до проведения зачёта с оценкой. График погашения

задолженности устанавливается преподавателем в индивидуальном порядке с учетом причин невыполнения.

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная аттестация в виде зачёта с оценкой, что позволяет оценить достижение результатов обучения по дисциплине.

Перечень вопросов и список учебной литературы для подготовки к зачёту предоставляется в начале семестра.

Зачёт с оценкой может проводиться в устной или письменной форме. На подготовку к устному ответу на вопросы и решение задачи отводится 1 академический час. Для письменного ответа отводится 2 академических часа. При проведении зачета в устной форме в аудитории может находиться одновременно не более 4-5 обучающихся, оценивание проводится преподавателем(-ями) непосредственно во время зачёта. Письменный зачёт проводится одновременно со всем составом группы, оценивание результатов обучения проводится после проверки сданных работ.