

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ

«ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А.С. ПУШКИНА»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для промежуточной аттестации по дисциплине

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация выпускника Программист

Форма обучения очная

Санкт-Петербург
2025

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Разделы фонда оценочных средств

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП СПО.
2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.
3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения ОПОП СПО.
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Фонд оценочных средств составлен в соответствии с требованиями ФГОС по специальности.

Фонд оценочных средств разработали: Петров Юрий Николаевич

1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ С УКАЗАНИЕМ ЭТАПОВ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОПОП ВО

Целью освоения дисциплины «Элементы высшей математики» является достижение следующих результатов обучения: ОК 1, ОК 5.

Этап дисциплины в формировании компетенций соответствует 3, 4 семестрам.

Этап формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется на основе общей характеристики и соответствует порядку изучения дисциплин/профессиональных модулей/практик в учебном плане.

Основными этапами формирования указанных компетенций при изучении обучающимися дисциплины/профессионального модуля/практики является последовательное изучение содержательно связанных между собой разделов (тем) учебных занятий.

2. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ, ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ

Показателями оценивания компетенций являются следующие результаты обучения:

Код компетенции	Планируемые результаты обучения
ОК 1 ОК 5	<p><u>Знать:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – основные определения линейной алгебры, формулировки и доказательства теорем; – основные определения аналитической геометрии, формулировки и доказательства теорем; – основные определения начал математического анализа, формулировки и доказательства теорем; – основы теории комплексных чисел; – основные определения дифференциального исчисления, формулировки и доказательства теорем; – основные определения интегрального исчисления, формулировки и доказательства теорем; – основные определения дифференциального исчисления функций многих переменных, формулировки и доказательства теорем; – основные определения теории дифференциальных уравнений, формулировки и доказательства теорем; – основные определения теории интегрирования функции нескольких переменных, формулировки и доказательства теорем; – <i>основные определения теории рядов, формулировки и доказательства теорем.</i> <p><u>Уметь:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – выполнять преобразования с матрицами, вычислять определители, решать системы линейных уравнений методами Крамера и Гаусса; – работать с векторами, вычислять скалярное, смешанное, векторное произведения; – аналитически записывать уравнения прямых и плоскостей, описывать их взаимное расположение на плоскости и в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении; – решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости; – решать задачи, используя уравнения прямых, плоскостей и поверхностей 2-го порядка в пространстве; – пользоваться понятиями теории комплексных чисел; – <i>проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;</i> – <i>вычислять пределы последовательностей и функций, применять различные приемы вычисления пределов, применять пределы к исследованию непрерывности функций;</i> – находить производные элементарных функций, использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; – <i>применять понятие дифференциала для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;</i>

	<ul style="list-style-type: none"> – применять формулу Тейлора к вычислению пределов и проведению приближенных вычислений; – вычислять неопределенные интегралы от различных функций; – применять определенные интегралы к практическим задачам, в том числе для нахождения площади криволинейной трапеции и объема тела вращения; – находить область определения функции нескольких переменных; – вычислять производные функций нескольких переменных и применять их к исследованию кривых и поверхностей; – решать задачи, используя понятие частных производных и полного дифференциала функции нескольких переменных, в том числе применяя понятие дифференциала для приближенных вычислений; – применять методы решения обыкновенных дифференциальных уравнения, ДУ высших порядков, линейных ДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами, систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; – находить кратные и криволинейные интегралы; – использовать интегралы от функций многих переменных для решения прикладных задач, в том числе для нахождения длин дуг кривых, площадей сложных фигур, объемов цилиндрических поверхностей. – находить сумму сходящегося знакочередовательного ряда; – устанавливать сходимость/расходимость различных рядов, в том числе знакочередовательных, знакпеременных и функциональных; – использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.
--	---

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
1.	Алгебра	ОК 1 ОК 5	Знать понятия вектора, матрицы, системы линейных уравнений и операции с ними; формулировать основные теоремы и свойства; излагать методы Крамера и Гаусса. Применять свойства понятий и методы к решению задач векторной и линейной алгебры.	Контрольная работа 1. Тест 1. Расчетно-графическая работа 1.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
2.	Геометрия	ОК 1 ОК 5	Иметь представление о линейных геометрических объектах, кривых и поверхностях 2-го порядка; записывать и выводить уравнения объектов, определять их параметры; изображать объекты.		Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
			<p>Применять аналитические методы к решению геометрических задач.</p> <p>Исследовать поведение объектов при изменении параметров.</p>		
3.	Введение в математический анализ. Теория пределов	ОК 1 ОК 5	<p>Знать и оперировать понятием предела, бесконечно малых и больших, иллюстрировать понятия;</p> <p>формулировать основные теоремы.</p> <p>Владеть навыками вычисления и использования пределов для исследования функций с помощью предела.</p>	Контрольная работа 2. Тест 2. Расчетно-графическая работа 2.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
4.	Дифференцирование функции одной переменной	ОК 1 ОК 5	<p>Знать и иллюстрировать понятие производной.</p> <p>Формулировать и применять в задачах основные свойства производной.</p> <p>Владеть методами дифференцирования и аппроксимации функций, навыками применения производной для решения экстремальных и прикладных задач.</p>		Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
5.	Интегрирование функции одной переменной	ОК 1 ОК 5	<p>Знать и иллюстрировать понятия первообразной и определенного интеграла.</p> <p>Формулировать и применять в задачах основные свойства интеграла.</p> <p>Владеть методами интегрирования и вычисления количественных характеристик геометрических и физических объектов.</p>	Контрольная работа 3. Тест 3. Расчетно-графическая работа 3.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
6.	Дифференцирование функции нескольких переменных	ОК 1 ОК 5	<p>Знать и иллюстрировать понятие функции нескольких переменных, обобщение понятий предела и производной на случай нескольких</p>	Контрольная работа 4. Тест 4. Расчетно-графическая работа 4.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
			переменных. Применять методы дифференцирования к решению геометрических и экстремальных задач.		
7.	Дифференциальные уравнения	ОК 1 ОК 5	Давать и иллюстрировать определения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), его решения, задачи Коши; формулировать основные теоремы. Классифицировать ОДУ, выбирать и применять методы его решения. Владеть методами решения задач, приводящих к ОДУ.		Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
8.	Интегрирование функции многих переменных	ОК 1 ОК 5	Формулировать определения и иллюстрировать понятия кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Формулировать и применять в задачах основные свойства интеграла. Владеть методами интегрирования в приложении к задачам геометрии и теории поля.	Контрольная работа 5. Тест 5. Расчетно-графическая работа 5.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
9.	Ряды	ОК 1 ОК 5	Знать определения ряда и его суммы, формулировать свойства рядов и условия сходимости. Уметь вычислять точно и приближенно суммы рядов, исследовать ряды на сходимость. Применять ряды при решении задач аппроксимации.	Контрольная работа 6. Тест 6. Расчетно-графическая работа 6.	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно
Итого:		ОК 1 ОК 5	Форма контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации	Шкала оценивания
			Экзамен	Устный экзамен Письменный экзамен	Отлично Хорошо Удовлетворительно Неудовлетворительно

3. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОПОП ВО

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Расчетно-графические работы выполняются обучающимися индивидуально или в группе и выдаются по мере прохождения материала. Выполнение расчетно-графической работы состоит в выполнении заданий, оформлении отчета и защиты в форме доклада. Выполненные задания заранее представляются на проверку и оценивание преподавателю (1-ый этап работы). Представление отчета и защита работ проходят в назначенные преподавателем часы консультаций (2-й этап).

Тема 1 «Алгебра и геометрия»

Задание 1. Исследование и построение кривых 2-го порядка, заданных в полярных координатах

Дано общее уравнение кривой 2-го порядка в полярных координатах $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$.

- 1) Изменяя значение параметров p , ε в соответствующем полярном уравнении кривой 2-го порядка исследовать поведение графика в зависимости от изменения этих параметров. Провести исследование отдельно для эллипса, гиперболы и параболы с помощью графического редактора (например, Desmos <https://www.desmos.com/calculator>).
- 2) Согласно проведённому в пункте 1 исследованию, выписать уравнение эллипса, гиперболы и параболы при конкретных значениях параметров p , ε и построить их графики в полярной системе координат. Сохранить полученные графики (с указанием соответствующих значений параметров p , ε) и поместить их в отчёт.
- 3) Привести полярные уравнения кривых 2-го порядка из п.2. к каноническому виду (переход от полярного уравнения к каноническому представить в отчёте), построить их графики в декартовой системе координат, сохранить графики с указанием параметров построенных кривых и поместить их в отчёт.

Задание 2. Приведение общего уравнения кривых 2-го порядка к канонической форме

Дано общее уравнение кривой 2-го порядка $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$.

- 1) С помощью графического редактора (например, Desmos <https://www.desmos.com/calculator>) нарисовать график кривой, заданной общим уравнением.
- 2) Применяя формулы преобразования координат, выполнить поворот и параллельный перенос координатных осей, привести общее уравнение кривой 2-го порядка к канонической форме (см. типовой расчёт по линейной алгебре и аналитической геометрии, задание №2, модуль 1).
- 3) Нарисовать (без помощи графического редактора) график полученной кривой в исходной системе координат, отметив каноническую систему координат. В канонической системе координат нарисовать вершины, фокусы и директрисы кривой.
- 4) Сравнить график кривой, полученной в п.1. с графиком кривой, полученном в п.3.

Задание 3. Поверхности второго порядка

Дано общее уравнение поверхности 2-го порядка:

$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0$$

Привести уравнение к каноническому виду и построить график поверхности, заданной этим уравнением.

Тема 2 «Предел и производная»

Задание 1. Предел

Дана последовательность и функция:

$$a_n = \frac{4}{1 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 17} + \dots + \frac{4}{(8n-7) \cdot (8n+1)} \quad f(x) = \left(\frac{2x-3}{3x+8} \right)^{4x+11}$$

Исследуйте поведение предложенных величин.

- 1) Вычислите предел последовательности при $n \rightarrow \infty$. Вычислите предел функции при $x \rightarrow \infty$.
- 2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n . Постройте график функции в зависимости от x .
- 3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности: Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечности:
 - а) Вспомните определение сходящейся последовательности; вспомните определение предела функции на бесконечности;
 - б) выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 ;
 - б) для каждого такого числа изобразите на графике ε -окрестность (« ε -трубу»)
- г) и найдите на графике номер N , начиная с которого все члены последовательности попадают в ε -окрестность или установите, что такого номера нет. и найдите на графике δ -окрестность, в которой все значения функции попадают в ε -окрестность или установите, что такой окрестности нет.

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением, равным 6,5 кв. метров. При каких линейных размерах сечения на облицовку стенок канала пойдет наименьшее количество материала?

Проведите исследование:

- 1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
- 2) Решите задачу аналитически.
- 3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
- 4) Запишите ответ.

Задание 3. Исследование функции

Дана функция $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot (x-2)^3$. Проведите её полное исследование:

- 1) Найдите область определения функции.
- 2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.
- 3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.
- 4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.
- 5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
- 6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
- 7) Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.
- 8) Постройте график.

Тема 3 «Интеграл функции одной переменной»

Задание 1. Первообразная

Дана кусочно-заданная функция:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & 0 \leq x < 3, \\ 3x^2 + 1, & x < 0. \end{cases}$$

- 1) Найдите такую непрерывную функцию $f(x)$, что $f'(x) = g(x)$ или докажите, что она не может быть непрерывна.
- 2) Постройте графики функций $f(x)$ и $g(x)$ в одном масштабе и расположите их один под другим.

- 3) Проанализируйте графики, сделайте комментарии о виде графика функции $f(x)$ в зависимости от вида графика функции $g(x)$.

Задание 2. Приложения интегралов

Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первого года, а затем изменяется по закону $R(t) = 10 \cdot e^{-0,2(t-1)}$, где t – время, выраженное в годах. Найдите среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 5 лет.

Проведите исследование:

- 1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
- 2) Решите задачу аналитически.
- 3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи.
- 4) Запишите ответ.

Задание 3. Приложения несобственных интегралов

Найдите площадь фигуры, образованной графиком функции $f(x)$ и её наклонной асимптотой, если $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{5(x-1)^2}$. Руководствуйтесь следующим планом:

1. Поиск асимптот.
2. Изображение фигуры на рисунке (эскиз).
3. Вычисление площади фигуры.
4. Запись ответа.

Тема 4 «Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в области

На плоскости Oxy найдите точку, сумма квадратов расстояний которой от трёх прямых: $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ – была бы наименьшей. Изобразите на графике.

Задание 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак втекает 5 л воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

Задание 3. Линейные дифференциальные уравнения

Пружинный маятник движется по закону:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

- 1) Выясните, почему движение маятника описывается дифференциальным уравнением такого вида.
- 2) Установите характер данного движения (периодический, аperiodический) при $p(t) = 4$, $q(t) = 5$.
- 3) Изобразите закон движения в системе координат.
- 4) Убедитесь в линейной независимости фундаментальной системы решений данного ДУ, выпишите вронскиан.
- 5) Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t) = t^2 e^{2t}$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.
- 6) Решите ЛНДУ методами вариации произвольной постоянной и неопределенных коэффициентов.

Тема 5 «Интеграл функции нескольких переменных»

Задание 1. Двойной интеграл. Вычисление площади

Плоская область D ограничена линиями $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x = 1 - \sqrt{y}$, $x - 3y = 1$ и содержит точку $O(0;0)$.

- 1) Сделайте схематический рисунок области D .
- 2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D .

Задание 2. Тройной интеграл. Вычисление объема

Тело T ограничено поверхностями

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad (1)$$

$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad (2)$$

$$y = 0, \quad (3)$$

при $y \leq 0$.

- 1) Сделайте схематический рисунок тела T .
- 2) С помощью тройного интеграла найдите объем тела T .

Задание 3. Криволинейный интеграл. Вычисление массы дуги

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной

кривой $y = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$ между точками A и B с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, если плотность вещества равна $\rho(x, y) = 3$.

Задание 4. Теория поля. Вычисление потока

Дано векторное поле $\vec{a} = 2(x+y)\vec{i} - (x+2y-2z-2)\vec{k}$ и плоскость σ , заданная уравнением $x+y+2z=2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M – точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

- 1) Найдите поток Q векторного поля \vec{a} через часть S плоскости σ , вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали \vec{n} , направленной от начала координат $O(0;0;0)$.
- 2) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля \vec{a} через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.

Задание 5. Теория поля. Вычисление циркуляции

Дано векторное поле $\vec{a} = 2(x+y)\vec{i} - (x+2y-2z-2)\vec{k}$ и плоскость σ , заданная уравнением $x+y+2z=2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M – точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Найдите циркуляцию C векторного поля \vec{a} по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

Задание 6. Теория поля. Потенциал

Дано векторное поле $\vec{a}(M) = -3x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 - 2z)\vec{k}$.

- 1) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
- 2) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

Тема 6 «Ряды»**Задание 1. Числовые ряды**

$$а) \sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10} \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (e^{1/n^2} - 1) \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n} \quad г) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$$

Исследуйте данные числовые ряды на сходимость согласно плану:

- 1) Проведите аналитическое исследование сходимости ряда. Укажите тип сходимости в случае, если ряд знакопеременный. Используйте необходимое и достаточное условия сходимости.
- 2) В графическом редакторе постройте графики общего члена ряда и частичных сумм ряда. Исследуйте их поведение при возрастании n .
- 3) Сравните результаты аналитического и графического исследований. Сделайте вывод.

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:

<https://www.desmos.com/calculator/aa1pikkkxsx>

Задание 2. Область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$$

Проведите исследование области сходимости данного ряда согласно плану:

- 1) Найдите область сходимости ряда аналитически.
- 2) В графическом редакторе постройте график частичных сумм.
- 3) По графику исследуйте поведение (непрерывность) сумм ряда в области сходимости и вне её.
- 4) Сделайте вывод.

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:

<https://www.desmos.com/calculator/kdrto7abpo>

Задание 3. Ряд Тейлора

$$f(x) = xe^{1-x}, \quad x_0 = 1$$

Исследуйте ряд Тейлора для данной функции в заданной точке согласно плану:

- 1) Разложите функцию в ряд Тейлора в заданной точке аналитически.
- 2) Найдите область сходимости полученного ряда к функции.
- 3) В графическом редакторе постройте графики частичных сумм ряда Тейлора (полиномов Тейлора) и график функции.
- 4) По графикам исследуйте поведение полиномов Тейлора при увеличении n .

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:

<https://www.desmos.com/calculator/uximpjelgn>

Задание 4. Приложения рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1}$

Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.

б) $f(x) = \ln(1+3x+2x^2)$

Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.

в) $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$

Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y(0) = 1, \quad k = 5$$

Шкала оценивания и критерии оценки:

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

- **к выполнению заданий** - в работе должны быть:
 - а. представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения,
 - б. указаны используемые теоретические положения и методы,
 - с. получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
- **к оформлению отчета** - отчет должен быть представлен в печатном или электронном виде в форматах doc, docx и содержать:

- a. титульный лист (название работы, ФИО исполнителей, номера групп, ФИО проверяющего);
 - b. условия всех заданий;
 - c. решение (исследование), его теоретическое обоснование, численные результаты;
 - d. графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в графическом или математическом редакторе);
 - e. выводы;
 - f. оценочный лист (для работы, выполненной командой; при этом вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 5 баллов).
- **к докладу** – для доклада отводится от 7 до 10 минут. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:
 - a. постановку задачи;
 - b. изложение основных этапов исследования или решения;
 - c. ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;
 - d. результаты исследования или решения и их оценку;
 - e. выводы.

Наименование критерия	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
I. КАЧЕСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ		
1. Последовательность, полнота и оптимальность решения (исследования)	0,5	1
2. Обоснованное и корректное применение методов решения	1	2
3. Корректность результатов	0,5	1
Общая оценка за выполнение заданий	2	4
II. КАЧЕСТВО ОТЧЕТА		
1. Полнота отчета	0,5	1
2. Качество оформления отчета	0,5	1
Общая оценка за отчет	1	2
III. КАЧЕСТВО ДОКЛАДА		
1. Содержательность и качество устного изложения материала	1	1,5
2. Корректность и полнота ответа на дополнительные вопросы	1	1,5
Общая оценка за доклад	2	3
ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА ЗА ЗАЩИТУ	5	9

Соответствие баллов шкале оценивания

Количество баллов	Оценка обучающегося
9	отлично
7 - 8	хорошо
5 - 6	удовлетворительно
менее 5	неудовлетворительно

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольные работы выполняются обучающимися в конце пройденной темы во время аудиторных занятий. На выполнение отводится 2 академических часа. Работы выполняются индивидуально, представляются в письменной форме и должны удовлетворять следующим требованиям: в работе указывается ФИО студента, номер группы, условие каждого задания, основные этапы решения, необходимые иллюстрации, ответ или вывод.

Комплект заданий для контрольной работы

Тема 1 «Алгебра и геометрия»

Задание 1. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} некопланарны. При каких значениях параметра λ векторы $\vec{a} + 2\vec{b} + \lambda\vec{c}$, $4\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c}$, $7\vec{a} + 8\vec{b} + \lambda^2\vec{c}$ можно принять за новый базис?

Задание 2. На векторах $\vec{a} = (2; 3; 1)$ и $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти площадь треугольника и длины всех его высот.

Задание 3. Дана функция $g(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2} + 5$ и матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Вычислить $g(A)$.

Задание 4. Решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Задание 5. Исследовать систему на количество решений в зависимости от параметра t :

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$$

Задание 6. Написать уравнение прямой, проходящей на расстоянии $\sqrt{10}$ от точки $A(5; 4)$, перпендикулярно прямой $2x + 6y - 3 = 0$.

Задание 7. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$.

Задание 8. Заданы две прямые:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}, \quad L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Выяснить их взаимное расположение. Если скрещиваются или параллельны – найти расстояние между ними. Если пересекаются – точку пересечения.

Задание 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + y - 3z = -19 \\ 2y - 3z = -26 \end{cases}$, перпендикулярно к плоскости $4x - 3y + 5z = 46$.

Задание 10. Построить тело, ограниченное следующими поверхностями: $x^2 + z^2 = 4$, $y = \sqrt{x^2 + z^2} - 2$, $y = 2$.

Тема 2 «Предел и производная»

Задание 1. Вычислите:

$$\sqrt[4]{\frac{5-5i}{-2-2\sqrt{3}i}}.$$

Задание 2. Вычислите пределы без использования правила Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6} - 2\sqrt[3]{3x-5}} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3-x}} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(x/\pi)}{\sin x}$$

Задание 3. Охарактеризуйте точки разрыва функции:

$$f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{1}{3x}}, & x < 0 \\ 2x - 5, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Задание 4. Вычислите производную функции по определению:

$$y = \frac{3}{1-2x}.$$

Задание 5. Вычислите предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 e^{\frac{1}{x^2}}).$$

Задание 6. Найдите прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

Задание 7. Найдите экстремумы данной функции, укажите их тип (гладкий, острый, угловой):

$$y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Задание 8. Найдите асимптоты графика функции:

$$f(x) = \frac{3x^2}{(2x-5)^2}.$$

Тема 3 «Интеграл функции одной переменной»

Задание 1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{x + \sqrt{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx \quad \text{б) } \int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx \quad \text{в) } \int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-2} dx$$

Задание 2. Вычислите определенный интеграл по определению:

$$\int_0^{10} e^{3x} dx.$$

Задание 3. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{-e^\pi}^{e^\pi} e^{x^2} \sin x dx.$$

Задание 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = 2 - \cos \varphi$, $r = \cos \varphi$.

Задание 5. Найдите длину дуги кривой: $y = \frac{x}{4}\sqrt{2-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

Задание 6. Найдите площадь фигуры, ограниченной петлей данной кривой:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

Задание 7. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Задание 8. Исследуйте на сходимость интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2+2}} dx$$

Тема 4 «Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Решить ДУ 1-го порядка:

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

Задание 2. Решить ДУ 2-го порядка:

$$yy'' = y'(y'+1)$$

Задание 3. Решить ДУ 4-го порядка.

$$y^{IV} = -\frac{3}{x}y'''$$

Задание 4. Решить задачу Коши для ДУ 3-го порядка.

$$y''' = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$$

Задание 5. Решить ЛНДУ методом подбора частного решения.

$$y''' + y' = 2x + 1$$

Задание 6. Решить ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sqrt{9+x}$$

Задание 7. Решить систему линейных однородных ДУ (СЛОДУ) методом Эйлера.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - x \\ \dot{y} = -9x + y \end{cases}$$

Тема 5 «Интеграл функции нескольких переменных»

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^2 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^{1/3}}^0 f dx$$

Задание 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 3y, \quad x^2 + y^2 = 6y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$\int_l e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) \quad l: x^2 + y^2 = R^2$$

Задание 4. Найти функцию, для которой данное выражение является полным дифференциалом

$$(6x^2 - 3y^2) dx + (6y^2 - 6xy) dy$$

Задание 5. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (3y^2 + z^2) dx dz$,

где S - внешняя сторона поверхности $y^2 + x^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1$.

Тема 6 «Ряды»

Задание 1. Исследуйте ряды на сходимость:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Задание 2. Исследуйте ряды на сходимость, укажите тип сходимости:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+5}{n} \right)^n \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$$

Задание 3. Найдите область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{10^n}$$

Задание 4. Найдите ряд Тейлора данной функции в данной точке:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}, \quad x_0 = 1$$

Задание 5. Разложите функцию в ряд Маклорена:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$$

Шкала оценивания и критерии оценки

- **10 баллов** — обучающийся правильно выполняет все задания, выбирает оптимальный способ решения, аккуратно оформляет работу.
- **8-9 баллов** - обучающийся выполняет все задания, при сохранении правильной последовательности этапов решения допускает незначительные вычислительные ошибки, аккуратно оформляет работу.
- **6-7 баллов** - обучающийся правильно выполняет 60 % заданий, допускает вычислительные ошибки, непоследовательность в решении, неаккуратность в оформлении.
- **0-5 баллов** - обучающийся правильно выполняет менее 60 % заданий, допускает существенные ошибки в вычислении и последовательности решения, оформление работы - неудовлетворительное.

Соответствие баллов шкале оценивания

Количество баллов	Оценка обучающегося
10	отлично
8 - 9	хорошо
6 - 7	удовлетворительно
менее 6	неудовлетворительно

ТЕСТ

Тестирование проводится во внеаудиторное время преподавателем в заранее установленные часы. Тест проводится в два этапа по мере изучения тем программы дисциплины. На прохождение каждого этапа теста отводится 1 академический час.

При проведении тестирования преподавателем тест выполняется индивидуально, результаты представляются в письменной форме и должны удовлетворять следующим требованиям: в работе указывается ФИО студента, номер группы, номер задания, необходимые иллюстрации, ответ.

Тест по теме 1 «Алгебра и геометрия»

Тема 1.1 «Алгебра»

Тестовые задания по теме 1.1:

Задача 1. Матрицы

Решите матричное уравнение: $AXB = (\alpha C + D)^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2-3i & 1+8i \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 20-i & -13-6i \\ -30-6i & -28-6i \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1-2i.$$

Задача 2. Определители. СЛАУ

Даны системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$$

- 1) Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность;
- 2) Выпишите ранги основной и расширенной матрицы в обеих системах;
- 3) Найдите определитель основной матрицы совместной определенной системы методом разложения по 3-й строке и 2-ому столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями);
- 4) Решите совместную определенную систему, проверьте решение подстановкой;
- 5) Неопределенную или несовместную систему запишите как однородную и найдите ее ФСР и общее решение.

Тема 1.2 «Геометрия»

Тестовые задания по теме 1.2:

Задача 1. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = \{4, -3, 0\}$ и $\vec{b} = \{0, 4, 0\}$.

- 1) Разложите вектор $\vec{m} = \{2, -1, 0\}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}\}$, найдите его направления в этом базисе.
- 2) Найдите длину высоты треугольной призмы, построенной на векторах \vec{a} , \vec{b} и $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- 3) Найдите двугранный угол между гранью, построенной на векторах \vec{a} и \vec{n} , и гранью, построенной на векторах \vec{b} и \vec{n} .
- 4) Исследуйте на компланарность тройку векторов: $\vec{p} = \{4, -3, 16\}$, $\vec{q} = \{0, 4, 16\}$, $\vec{r} = \{4, -7, 0\}$.

Задача 2. Прямая и плоскость

Даны точки $M(2, -5, -5)$, $A(-1, 4, -4)$, $B(-4, 3, 3)$, $C(5, -3, 3)$.

- 1) Найдите уравнение прямой L , проходящей через точку M и начало отсчета.
- 2) Найдите уравнение плоскости α , проходящей через точки A , B , C .
- 3) Найдите уравнение прямой L_1 , проходящей через точку M перпендикулярно плоскости α .
- 4) Найдите уравнение прямой L_2 , проходящей через проекцию точки M на плоскость α и параллельно прямой L .
- 5) Найдите уравнение плоскости β , проходящей через прямую L_1 и прямую L_2 .

Задача 3. Кривые второго порядка

Даны кривые K_1, K_2 :

K_1 : геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до точек $F_1(9, -10 - \sqrt{69})$ и $F_2(9, -10 + \sqrt{69})$ постоянна и равна 26.

$$K_2: \frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1.$$

- 1) Изобразите кривые на координатной плоскости, отметьте на рисунке их параметры.
- 2) Найдите уравнения директрис и модуль разности эксцентриситетов этих кривых.

Тест по теме 2 «Предел и производная»

Тестовые задания по теме 2:

Задача 1. Предел

Даны функции:

$$\alpha_1(x) = x \arcsin(x/2)$$

$$\beta_1(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$\alpha_2(x) = 1 - \cos 4x$$

$$\beta_2(x) = 3x^2 - x - 2$$

- 1) Сравните $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ в точке $x = 0$.
- 2) Сравните $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ при $x \rightarrow \infty$.
- 3) Вычислите предел выражения $(1 + \alpha_1(x))^{\ln|\alpha_2(x)|}$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 2. Производная

Даны функции:

$$f(x) = e^{\arccos^2 \sqrt{x+5}}$$

$$g(x) = (\cos(x+2))^{\ln x}$$

$$h(x) = (x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}$$

- 1) Найдите производную функции $f(x)$.
- 2) Найдите производную функции $g(x)$.
- 3) Даны точки $a = 2$ и $b = -1$. Какие из них являются стационарными или критическими для функции $h(x)$? Исследуйте функцию на экстремум в этих точках.

Тест по теме 3 «Интеграл функции одной переменной».

Тестовые задания по теме 3:

Задача 1. Первообразная

Найдите все функции, производные которых равны данным функциям:

а) $\sin x \cos^3 x$

б) $x \ln(x-1)$

в) xe^{x^2+3}

Задача 2. Интегрирование рациональных дробей

Разложите данную рациональную дробь на простейшие, укажите их тип, проинтегрируйте полученное выражение:

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Задача 3. Определённый и несобственный интеграл

Определите, какой из интегралов является определённым, а какой несобственным. Вычислите определённый интеграл, а несобственный исследуйте на сходимость.

а) $\int_0^{\pi/8} \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[4]{\cos^7 2x}} dx$

б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{x^8 + 3x^7 + 2}}$

Задача 4. Приложение несобственного интеграла

Найдите площадь под графиком функции $f(x) = \frac{2}{x^2 + 4x + 8}$ на промежутке $[0, +\infty)$.

Тест по теме 4 «Дифференциальные уравнения».

Тестовые задания по теме 4:

Задача 1. Задачи, приводящие к ДУ

Кусок металла с температурой 20°C помещён в печь с температурой 800°C . При разности температур печи и металла в $\Delta T^\circ \text{C}$ металл нагревается со скоростью $k \cdot \Delta T^\circ \text{C}$ в минуту. Найдите коэффициент k , если через 69 минут температура металла была равна 410°C .

- 1) Составьте ДУ по условию задачи.
- 2) Определите тип ДУ, найдите общее решение.
- 3) Поставьте задачу Коши для данных условий, найдите ее решение.
- 4) Ответьте на вопрос задачи.

Задача 2. Методы решения ДУ 1-го порядка

Даны ДУ 1-го порядка:

- 1) $y^2 + x^2 y' = xy y'$
- 2) $2x(x^2 + y)dx = dy$
- 3) Определите тип каждого ДУ и метод его решения.
- 4) Найдите общие интегралы ДУ, если возможно – общие решения.

Задача 3. Линейные ДУ высших порядков

Дано ДУ: $y'' + 5y' + 6y = f(x)$

- 1) Определите порядок ДУ.
- 2) Постройте ФСР однородного ЛДУ, проверьте ее на линейную независимость.
- 3) Постройте общее решение однородного ЛДУ.
- 4) Найдите общее решение неоднородного ЛДУ методом неопределенных коэффициентов, если $f(x) = e^{-2x}$.
- 5) Найдите общее решение неоднородного ЛДУ методом вариации произвольных постоянных, если

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

Тест по теме 5 «Интеграл функции нескольких переменных».

Тестовые задания по теме 5:

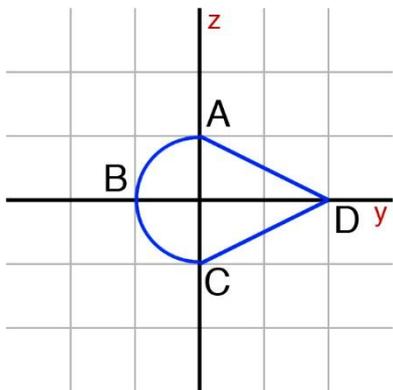


Рис. 1. Сечение тела T координатной плоскостью Oyz

Дано тело T , ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0, \quad y + 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2.$$

На рис. 1 представлено сечение тела T координатной плоскостью Oyz .

Изобразите тело T на графике в пространстве.

Задача 1. Проверьте выполнение условий теоремы Грина для вектор-функции $\vec{F} = \{\cos y + z^4; y^2 + \sin z\}$. Вычислите работу силы, заданной данной вектор-функцией, по замкнутому контуру $ABDA$.

Задача 2. Дана консервативная сила $\vec{G} = \{2ye^{y^2 - z^2} - \sin y; \sin z - 2ze^{y^2 - z^2}\}$. Проверьте, что выражение $\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}$ является полным дифференциалом. Вычислите работу данной силы по дуге $DABC$.

Задача 3. Вычислите массу дуги AB , если в каждой точке дуги известна её плотность $\mu(y, z) = \frac{3}{2} z^5 y$.

Задача 4. Для поля $\vec{a} = \{\cos zy; \sqrt{x^2 + z^2}; e^{y^2} - 5z\}$ вычислите дифференциальные характеристики $\nabla \vec{a}$ и $\nabla \times \vec{a}$, дайте им названия.

Задача 5. Для поля \vec{a} проверьте выполнение условий теоремы Гаусса-Остроградского. Вычислите поток поля \vec{a} через поверхность тела T в направлении внешней, а затем внутренней нормалей.

Тест по теме 6 «Ряды».

Тестовые задания по теме 6:

Задача 1. «Числовые ряды. Сумма ряда»

Даны числовые ряды:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$ б) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

- 1) Постройте частичные суммы рядов
- 2) Исследуйте последовательности частичных сумм на сходимость

Задача 2. «Сходимость числовых рядов»

Даны числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$

- 1) Установите, выполняется ли необходимое условие сходимости
- 2) Установите, выполняется ли достаточное условие сходимости.
- 3) Сделайте вывод о сходимости рядов, для знакопередающего установите тип сходимости

Задача 3. «Сходимость функциональных рядов»

Для данного ряда найдите все значения x , при которых он сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$$

Задача 4. «Ряды Тейлора и Маклорена»

Даны функции:

$$f(x) = \frac{1}{2x+5}, \quad x_0 = -3$$

$$g(x) = x \cos 5x$$

- 1) Найдите разложение первой функции в ряд Тейлора в заданной точке
- 2) Найдите для второй функции ее ряд Маклорена
- 3) Найдите все значения x , для которых полученные разложения справедливы

Шкала оценивания и критерии оценки

Процент результативности определяется, как (количество верных ответов на задания теста)/(общее число заданий в рамках одной темы)*100. Оценка выставляется в соответствии с таблицей.

Процент результативности (правильных ответов в %)	Оценка обучающегося
90 ÷ 100	отлично
74 ÷ 90	хорошо

60 ÷ 74	удовлетворительно
менее 60	неудовлетворительно

УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН

Экзамен проводится в устной или письменной форме.

В билет включается по два вопроса из перечня вопросов для данного семестра, а также одна задача из списка задач к экзамену.

Ответ должен содержать определения понятий, входящих в вопрос, утверждения теорем, интерпретацию понятий (геометрический или физический смысл), изложение методов, указание границ их применимости.

Для получения оценки «хорошо» или «отлично» необходимо представить доказательства утверждений и теоретическое обоснование методов, привести примеры применения понятий и теорем к решению задач.

Помимо этого, обучающемуся предлагается кратко ответить на два дополнительных вопроса по темам семестра (дать определение понятия, сформулировать теорему, провести классификацию, проиллюстрировать понятие). Вопросы выбираются из перечня вопросов к экзамену и формулируются преподавателем во время устной беседы или включаются в билет при проведении письменного экзамена.

Процедура проведения экзамена в устной и письменной форме описана в разделе 4 настоящего документа.

Экзаменационный билет № 10 (1 семестр)

1. Вопрос. *Общее уравнение кривых 2-го порядка. Сведение к каноническому уравнению параболы.*

2. Вопрос. *Непрерывность функции. Определения и свойства.*

3. Задача. *Решить систему уравнений*

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

Приблизительный список вопросов к экзамену (1 семестр)

1. Матрицы. Основные операции с матрицами. Обратная матрица. Формула для вычисления обратной матрицы.
2. Определитель. Свойства определителя.
3. Понятие ранга матрицы (через миноры). Базисный минор. Теорема о базисном миноре.
4. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.
5. Понятие линейного пространства. Базис и размерность линейного пространства, их связь. Единственность разложения по базису.
6. Понятие СЛАУ. Однородная СЛАУ, количество решений однородной СЛАУ.
7. Понятие СЛАУ. Неоднородная СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Понятие СЛАУ. Формулы Крамера.
9. Понятие СЛАУ. Метод Гаусса.
10. Понятие СЛАУ. Структура общего решения однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений. Структура общего решения неоднородной СЛАУ.
11. Векторы и операции с ними. Проекция и их свойства.
12. Скалярное произведение векторов.
13. Векторное и смешанное произведение векторов.
14. Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Формула расстояния от точки до прямой.
15. Уравнения плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.
16. Эллипс.
17. Гипербола.
18. Парабола.
19. Матрица поворота. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
20. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
21. Кванторы. Понятие множества. Операции с множествами.

22. Понятие функции (область определения, область значений, образ, прообраз и проч.), инъекции, сюръекции, биекции. Обратная функций. Сложная функция.
23. Множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел (аксиомы и св-ва).
24. Комплексные числа.
25. Промежутки числовой прямой. Точная верхняя и нижняя грани множества.
26. Лемма о вложенных отрезках.
27. Лемма Бореля-Лебега
28. Лемма о предельной точке
29. Предел последовательности. Арифметические свойства пределов.
30. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема Вейерштрасса.
31. Предельный переход в неравенствах. Теорема о сжатой переменной.
32. Второй замечательный предел.
33. Вычисление пределов последовательностей $x_n = \frac{n}{q^n}, x_n = n^{\frac{1}{n}}, x_n = \frac{a^n}{n!}, x_n = a^{1/n}$.
34. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы.
35. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
36. Предел функции. Определения по Коши и Гейне, арифметические свойства пределов. Односторонние пределы.
37. Бесконечно-малые функции и их свойства.
38. Предельный переход в неравенствах. Теорема о сжатой переменной.
39. Первый замечательный предел, второй замечательный предел и их следствия.
40. Предел монотонной функции.
41. Асимптотическое сравнение функций. Теорема о замене на эквивалентную.
42. Понятие непрерывной функции. Классификация точек разрыва.
43. Локальные свойства непрерывных функций.
44. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема Вейерштрасса.
45. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема Больцано-Коши.
46. Теорема об обратной функции.
47. Непрерывность элементарных функций.
48. Понятие производной и дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.
49. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная.
50. Формулы производной суммы, произведения, частного.
51. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
52. Производные элементарных функций.
53. Понятие экстремума. Теорема Ферма.
54. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
55. Формула Тейлора. Теорема о виде остаточного члена. Остаточный член в форме Лагранжа и Коши.
56. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Пеано. Разложение элементарных функций.
57. Необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции.
58. Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
59. Правило Лопиталя.
60. Понятие выпуклой функции. Необходимое и достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.

Экзаменационный билет № 17 (2 семестр)

1. Вопрос. *Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойство линейности.*
2. Вопрос. *Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решение методом вариации произвольной постоянной.*
3. Задача. *Вычислить интеграл*

$$\iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) dS,$$

где S - часть поверхности $2z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$, вместе с этой плоскостью.

Приблизительный список вопросов к экзамену (2 семестр)

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла
2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций.
3. Интегрирование простейших дробей.
4. Различные приемы интегрирования
5. Определенный интеграл Римана. Наводящие задачи, пример интегральной суммы для конкретной функции, определение интеграла Римана
6. Необходимые и достаточные условия существования интеграла Римана. Пример ограниченной, но неинтегрируемой функции
7. Классы интегрируемых функций
8. Свойства интеграла Римана и интегрируемых функций.
9. Теорема об аддитивности интеграла по промежутку, теоремы об оценке интеграла
10. Первая теорема о среднем
11. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о непрерывности интеграла
12. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла. Общий вид первообразной непрерывной функции.
13. Формула Ньютона-Лейбница. Формула замены переменной в определенном интеграле.
14. Свойства определенного интеграла от четных, нечетных, периодических функций. Приложения определенного интеграла.
15. Несобственные интегралы 1-ого и 2-ого рода. Определение. Признаки сходимости.
16. Понятие метрического пространства, открытого, замкнутого множеств, окрестности. Свойства открытых и замкнутых множеств. Типы точек в метрическом пространстве
17. Предел последовательности. Свойства и теоремы о пределах
18. Предел функции и вектор-функции. Свойства и теоремы о пределах
19. Непрерывность функции и вектор-функции. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций и вектор-функций
20. Общий вид линейного отображения из \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n
21. Дифференцируемость функции и вектор-функции. Частные производные.
22. Связь дифференцируемости и наличия частных производных
23. Матрица Якоби. Связь дифференцируемости и непрерывности
24. Производная суммы, произведения, частного, сложной функции. Производная по направлению
25. Теорема о среднем. Достаточное условие дифференцируемости функции
26. Производные и дифференциалы высших порядков. Достаточное условие равенства смешанных производных
27. Формула Тейлора. Необходимое условие экстремума
28. Достаточное условие экстремума. Критерий Сильвестра
29. Понятие дифференциального уравнения (ДУ) 1-ого порядка. Задача Коши. Изоклины. Теорема существования и единственности. Уравнение в симметричной форме
30. Линейные ДУ высших порядков. Теорема существования и единственности. Пространство решений
31. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского и его свойства
32. Базис пространства решений. Фундаментальная система решений
33. Понятие линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами. Построение общего решения.
34. Метод вариации произвольной постоянной для линейного неоднородного ДУ. Специальная правая часть.
35. Определение двойного интеграла. Необходимое условие интегрируемости
36. Суммы Дарбу для двойного интеграла, их свойства.
37. Достаточное условие интегрируемости функции (для двойного интеграла). Классы интегрируемых функций
38. Свойства интегрируемых функций
39. Свойства двойных интегралов, связанные с областью интегрирования и с неравенствами. Теорема о среднем
40. Вычисление двойного интеграла в прямоугольной области. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области
41. Замена переменных в двойном интеграле (геометрический вывод). Полярные координаты
42. Определение тройного интеграла. Необходимое условие интегрируемости
43. Суммы Дарбу для тройного интеграла, их свойства.
44. Достаточное условие интегрируемости функции (для тройного интеграла). Классы интегрируемых функций

45. Свойства интегрируемых функций
 46. Свойства тройных интегралов, связанные с областью интегрирования и с неравенствами. Теорема о среднем
 47. Вычисление тройного интеграла в параллелепипеде. Вычисление тройного интеграла в криволинейной области
 48. Замена переменных в тройном интеграле (геометрический вывод). Цилиндрическая и сферическая системы координат.
 49. Понятие кривой, простой кривой, спрямляемой кривой, длины кривой. Аддитивность длины кривой.
- Дифференциал длины дуги
50. Понятие криволинейного интеграла первого рода, его свойства и вычисление.
 51. Понятие криволинейного интеграла второго рода, его свойства и вычисление.
 52. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.
 53. Формула Грина
 54. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
 55. Поверхность, ориентация поверхности, площадь поверхности
 56. Поверхностный интеграл первого рода, свойства, вычисление
 57. Поверхностный интеграл второго рода, свойства, вычисление
 58. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода
 59. Формула Остроградского-Гаусса
 60. Формула Стокса
 61. Элементы векторного анализа
 62. Понятие ряда, суммы ряда. Необходимый признак сходимости ряда, критерий Коши, свойства сходящихся рядов.
 63. Признак Даламбера сходимости ряда
 64. Признак Коши сходимости ряда
 65. Интегральный признак сходимости ряда
 66. Ряды с членами произвольного знака. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница
 67. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов (ассоциативность, теорема о сходимости рядов из положительных и отрицательных членов исходного ряда)
 68. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов (теорема Римана, теорема о сходимости рядов из положительных и отрицательных членов исходного ряда)
 69. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов
 70. Функциональные последовательности. Теорема о непрерывности предельной функции
 71. Функциональные последовательности. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла
 72. Функциональные последовательности. Теорема о дифференцировании
 73. Степенные ряды. Первая теорема Абеля, вид области сходимости. Теорема Адамара.
 74. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля.
 75. Ряд Тейлора. Разложение e^x , $\sin x$, $\arctg x$ в ряд Маклорена
 76. Ряд Тейлора. Разложение $\ln x$, $\cos x$ в ряд Маклорена
 77. Ряд Тейлора. Разложение $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена
 78. Ряды Фурье. Поточечная сходимость рядов Фурье

Примерный список задач для подготовки к экзамену:

1 семестр

1. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{5n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5+1} - \sqrt[4]{n^4+1}}$
2. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$
3. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$
4. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)^n$
5. Вычислить производную функции $y(x) = \frac{1}{x} \arctg \sqrt{3x^2+1}$

6. Вычислить производную функции $y(x) = 2^{\cos x / \sqrt{x^2+3}}$
7. Вычислить производную функции $y(x) = x^{\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}$
8. Дана прямая $l: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3}$.
- Построить плоскость $P \perp l$, проходящую через точку $M(1,0,1)$.
 - Найти точку пересечения прямой l и плоскости $P_1: x-2y+3z-5=0$.
 - Найти орт направляющего вектора прямой l .
9. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 5x+3y+z=4 \\ 2x-5y+2z=11 \\ x+2y-3z=-7 \end{cases}$$

2 семестр

1. Вычислить интеграл:
- $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$
 - $\int_0^2 \frac{x dx}{1+x^4}$
 - $\int_0^2 e^{x/2}(1-3x) dx$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 16$.
3. Решить дифференциальное уравнение: $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.
4. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.
5. Найти $\text{grad } u(x, y)$, если $u(x, y) = \arcsin xy$.
6. $z(x, y) = \cos \frac{x}{y}$. Найти z'_x , z'_y , z''_{xy} , z''_{yy} .
7. Найти общее решение ЛОДУ: $y'' + 6y' + 9y = 0$.
8. Определите тип следующих интегралов, ответ поясните:
- $\int_1^5 \frac{dx}{(2-\sqrt{x})^2}$
 - $\int_1^2 \frac{dx}{(2-\sqrt{x})^2}$
 - $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{(1-\sqrt{x})^2}$
9. Кривая $\overset{\cup}{AB}$ задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Как найти L_{AB} ?
10. Найти общее решение ЛОДУ: $y'' + 4y' + 5y = 0$.
11. Исследовать ряд на сходимость:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(n+1)}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$
12. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$.
13. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя стандартные разложения: $f(x) = \sin^2 2x$.
14. Назовите эталонный ряд, сделайте вывод о сходимости:

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$

15. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 1$.

16. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{ABC} x^2 y dy + xy^2 dx$:

f. непосредственно;

g. по формуле Грина.

17. Найти $\operatorname{rot} \vec{a}$, $\operatorname{div} \vec{a}$ в точке $A(1,1,1)$ для поля $\vec{a} = (3 - ze^x)\vec{i} + (e^z + y)\vec{j} + z^2 y\vec{k}$.

18. Запишите формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

19. Определите тип интеграла: $\int_{AB} f(x, y) dl$, $AB: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, запишите выражение для dl .

Шкала оценивания и критерии оценки:

Критерии оценки	Баллы обучающегося	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
Уровень усвоения материала, предусмотренного программой		2	4
Умение выполнять задания, предусмотренные программой		2	3
Уровень раскрытия причинно-следственных связей		2	3
Уровень раскрытия междисциплинарных связей		1	2
Качество ответа (его общая композиция, логичность, убежденность, общая эрудиция)		2	3
Ответы на вопросы: полнота, аргументированность, убежденность, умение использовать ответы на вопросы для более полного раскрытия содержания вопроса		2	3
Деловые и волевые качества докладчика: ответственное отношение к работе, стремление к достижению высоких результатов, готовность к дискуссии, контактность		1	2
Итого баллов:		12	20

Соответствие баллов шкале оценивания

Оценка	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
«5» (отлично)	19	20
«4» (хорошо)	17	18
«3» (удовлетворительно)	12	16
«2» (неудовлетворительно)	0	11

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Во время проведения лекционных и практических занятий оценивается познавательная активность и участие в дискуссиях обучающихся, предварительная подготовка к занятию.

Тестирование по разделам дисциплины проводится преподавателем. При компьютерном тестировании баллы формируются системой автоматически и переводятся в систему оценок преподавателем в соответствии с утвержденной шкалой оценивания. При проведении теста преподавателем определение рейтинга теста и его пересчет в баллы проводится преподавателем.

Темы и задания расчетно-графических работ распределяются преподавателем между обучающимися или группами обучающихся в начале изучения темы. Готовые отчеты, доклады, презентации представляются в заранее оговоренные сроки. Преподаватель осуществляет организацию и контроль самостоятельной работы обучающихся при выполнении заданий: предоставляет график консультаций и определяет сроки выполнения и защиты этапов работы. В течении всего срока выполнения работ проводятся онлайн-консультации с обучающимися. Допуск обучающегося к защите происходит при условии наличия электронной или печатной версии отчета по расчетно-графической работе, выполненного в соответствии с требованиями к выполнению и оформлению работы. Оценивание расчетно-графических работ проводится по окончании защиты работ, результаты оценивания переводятся в систему оценок преподавателем в соответствии с утвержденной шкалой оценивания.

Контрольные работы проводятся по завершении изучения темы (тем) модуля в часы аудиторных занятий. Образцы контрольных работ или перечень примерных задач, а также требования к оформлению работ предоставляются обучающимся заранее. Проверка и оценивание контрольных работ проводится преподавателем в течение одной-двух недель, но не позднее окончания рубежной аттестации.

В случае невыполнения контрольных, расчетно-графических и тестовых заданий в установленные сроки обучающемуся необходимо погасить задолженность по невыполненным заданиям до проведения экзамена. График погашения задолженности устанавливается преподавателем в индивидуальном порядке с учетом причин невыполнения.

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная аттестация в виде экзамена, что позволяет оценить достижение результатов обучения по дисциплине.

Экзамен может проводиться в устной или письменной форме. На подготовку к устному ответу на вопросы билета и решение задачи отводится 1 академический час. Для письменного ответа отводится 2 академических часа. При проведении экзамена в устной форме в аудитории может находиться одновременно не более 4-5 обучающихся, оценивание проводится преподавателем(-ями) непосредственно во время экзамена. Письменный экзамен проводится одновременно со всем составом группы, оценивание результатов обучения проводится после проверки экзаменационных листов.